Analysis

Reihen (spezielle Folgenpaare) sind reelle Zahlen

<u>Bsp.</u> (Eulerzahl e)

$$e = \underbrace{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{}$$

$= s(n)$, Folge d. Partialsummen

$$s = \left(s(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Falls s konvergiert, dann sagt man, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{konvergiert.}$$

$$e \approx \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{1}_{k=1}$$

$$e \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

Der Grenzwert von s ist der Reihenwert von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \in \mathbb{R}$$

<u>Motivation</u>

Die Näherungen an e sind besser, wenn man

$$e \approx s(n) \in \mathbb{R}$$

als

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$$

<u>Bsp</u> (geometrische Reihe und Computerzahlen)

Geometrische Summe
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \underline{\text{konvergiert}}, \text{ falls } |q| < 1 \ (q \in (-1,1)) \\ (\text{d.h. } s = (s(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k)_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{Reihenwert } \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{R} \\ \underline{\text{divergiert}}, \text{ falls } |q| \geq 1 \ (q \geq 1, q \leq -1) \\ (\text{d.h. } s \text{ divergiert}) \end{cases}$$

$\boxed{q=1}$ s divergiert (s unbeschränkt), denn

$$\forall c > 0 : \exists n > C \quad |s(n)| = \left| \sum_{k=0}^{n} q^k \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom. Summe}}}{=}$$

$$n+1 > n > C$$

(... Reihe divergent)

$\boxed{q>1}$ s divergent (s unbeschränkt), denn

$$\forall c > 0 \ \exists n > C : |s(n)| = \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{\substack{q>1 \\ q^k>1}}{>} \sum_{k=0}^{n} 1 =$$

$$n+1 > n > C$$

Geometrische Summenformel

Satz $\mathbb{R} \ni \forall q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

I) $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \qquad \Big| \cdot q$$

II) $$q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q + q^2 + \ldots + q^{n+1} \qquad \text{I} - \text{II}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k - q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = (1 + q + \ldots + q^n) - (q + q^2 + \ldots + q^{n+1})$$

$$\cancel{q \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^k\right)} = 1 + q^{n+1}$$

$$\cancel{q} \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot (1-q) \qquad \Big| : (1-q)$$

da $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 + q^{n+1}}{1-q}$$

BRUNNEN

VO Analysis 16.4.18

3

... (Fotos) Geometrische Reihe

$\underline{q = -1}$: s divergiert (s hat mehrere Häufungspunkte), denn

$$\lim_{n\to\infty} s(2n-1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k =$$

$$\lim \frac{1-(-1)^{2n}}{1-(-1)} = \lim \frac{0}{2} = 0 \quad \text{(konstante Folge)}$$

$$\lim_{n\to\infty} s(2n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1}}{2} =$$

$$\lim \frac{2}{2} = 1$$

d.h. Teilfolge $(s(2n-1))_{n\in\mathbb{N}}$ konv. gegen 0 (1. Häufungspunkt) und Teilfolge $(s(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ konv. gegen 1 (2. Häufungspunkt)

$\underline{q < -1}$: s divergiert (Teilfolge $(s(2n-1)_{n\in\mathbb{N}})$ unbeschränkt $\Rightarrow$ s unbeschränkt)

$$\forall c > 0 : \exists n > C \cdot \frac{1-q}{q^2-1} \qquad |s(2n-1)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.} \\ \text{Summe}}}{=} \left|\frac{1-q^{2n}}{1-q}\right|$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-q > 0, \text{ da } q < -1 \\ 1-\underbrace{q^{2n}}_{\substack{>0 \\ >1}} < 0, \text{ da } q^{2n} > 1 \end{array}\right]$$

BRUNNEN

$$= -\frac{1-q^{2n}}{1-q} = \frac{q^{2n}-1}{1-q} \overset{\text{Trick}}{=}$$

$$\frac{(1+\overbrace{(q^2-1)}^{>0})^n - 1}{1-q} \overset{\text{Bin. LS}}{=} \frac{\cancel{1} + (q^2-1)n + \boxed{\ldots} - \cancel{1}}{1-q}$$

pos., wird vernachlässigt

$$\underbrace{\geq \frac{(q^2-1)n}{1-q} > C}_{\text{löse nach } n \text{ auf}}$$

$$n > C \cdot \frac{1-q}{q^2-1}$$

d.h. $\forall C > 0 : \exists n > C \cdot \frac{1-q}{q^2-1} : |s(2n-1)| > C$

$\Rightarrow (s(2n-1))_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt $\Rightarrow$ s unbeschränkt $\Rightarrow$ s divergiert

<u>$|q| < 1$</u> $(q \in (-1,1))$ s konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} =$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q} = \frac{1}{1-q}$$

wobei $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, denn

$$0 \leq |q|^n \underset{|q|\neq 0}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|^n}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}_{>0,\ |q|<1}\right)^n}$$

$$\frac{1}{|q|} > 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k-n} b^k$$

16.4.18

4

Bin. Lehrsatz

$$= \frac{1}{\underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{|q|}-1\right)n}_{k=1} + \underbrace{\dots}_{>0}} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}-1\right)n}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}-1\right)n} = \frac{1}{|q|-1} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

das Sandwich-Lemma ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

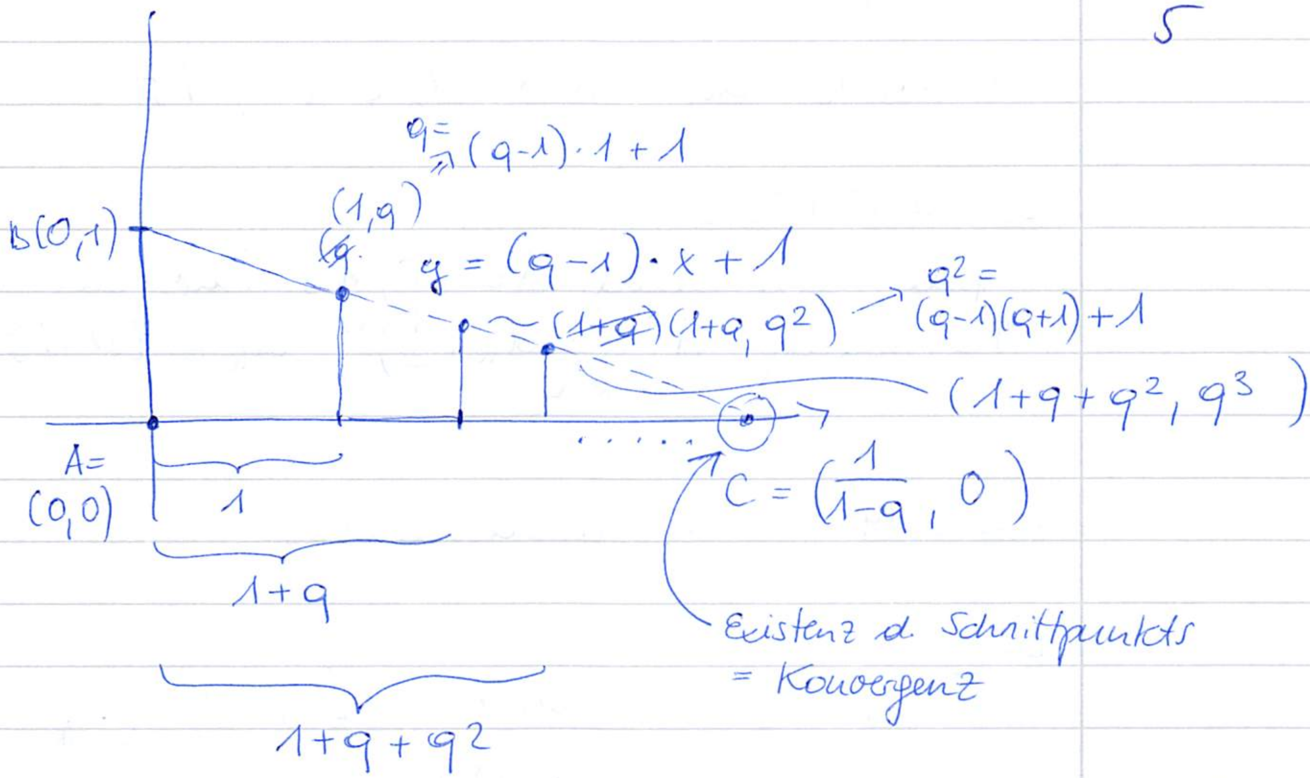
Für $q<0$: Folge "springt", konv. aber gegen 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ divergiert } \quad |q| \geq 1$$

Geometrische Erklärung für

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$



Also $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \underbrace{|AC|} = \frac{1}{1-q}$

endlich, falls d. Gerade $y = (q-1)\cdot x + 1$ d. x-Achse schneidet

$q = 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} 0^k = \underbrace{0^0}_{=1} + \underbrace{0^1 + \dots}_{=0} = \frac{1}{1-0} = 1$

Computerzahlen zur Basis 2 ($q = \frac{1}{2}$) mit Ziffern $d_k \in \{0, 1\}$

$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} d_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\geq 0}$ rationale Zahlen

$0 \leq 0.d_1 d_2 \dots d_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(z.B. $0.10\dots1$)

$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

Alle Computerzahlen in $[0; 1]$ sind

$0{:}\ d_1 d_2 \dots d_n$ mit $d_x \in \{0, 1\}$

Satz 3.55 (Sauer):

Jede reelle Zahl $A \in [0, 1]$ hat die Darstellung $A = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $d_k \in \{0; 1\}$

Satz 2.14: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Bew

z.z. $\underbrace{M = \{ A = 0.d_1 d_2 \dots \in [0, 1],\ d_k \in \{0, 1\} \}}_{\text{alle reellen Zahlen in } [0,1]} \subset \mathbb{R}$

überabzählbar

Annahme: M ist abzählbar, d.h.

$\exists f: \mathbb{N} \to M$ bijektiv

$\mathbb{N}$	M
1	$A_1 = 0.d_1^{(1)} d_2^{(1)} d_3^{(1)} \dots$
2	$A_2 = 0.d_1^{(2)} d_2^{(2)} d_3^{(2)} \dots$
3	$A_3 = 0.d_1^{(3)} d_2^{(3)} d_3^{(3)} \dots$
$\vdots$	

$M \ni A := 0.d_1 d_2 d_3 \dots$

$\neq A_j,\ j \in \mathbb{N}$

$d_1 = 1 - d_1^{(1)}$

$d_2 = 1 - d_2^{(2)}$

$d_3 = 1 - d_3^{(3)}$

$\vdots$

Abb. nicht surjektiv!

16.9.18

6

Da $A \in M$ und $A \neq A_j$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ nicht surjektiv (Widerspruch) $\blacksquare$

Anw. von Cantors 2ten Diagonalverfahren

<u>Def 2.15</u> Sei $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(a: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R})$

(i) Falls die Folge $s = (s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$\mathbb{R} \ni s(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k), \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, dann sagt man dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k) \text{ konvergiert}$$

(ii) Der Grenzwert $S \in \mathbb{R}$ von $s = (s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ heisst der Reihenwert (= Summe d. Reihe) von $\sum_{k=1}^{\infty} a(k) = S$

(Falls $(s = (s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, heisst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a(k)$ divergent)

Reihe ist Folgenpaar $(a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}}$,

$$s = (s(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k))_{n \in \mathbb{N}}$$

Konv. Reihe ist $(a, s, \text{Reihenwert} = \lim_{n \to \infty} s(n))$

BRUNNEN

Def 2.16 (Cauchy-Kriterium = "s ist konvergent" $\underset{\text{in } \mathbb{R}}{=}$ "s ist eine Cauchy-Folge")

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a(k)$ heißt konvergent, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq n_\varepsilon :$$

$$|s(n) - s(m)| \cancel{\leq} = \left| \sum_{k=1}^{n} a(k) - \sum_{k=1}^{m} a(k) \right|$$

$$\underset{n \geq m}{=} \left| \sum_{k=m+1}^{n} a(k) \right| < \varepsilon$$

Satz 2.17 (Divergenzkriterium für Reihen)

$$\lim_{k \to \infty} a(k) \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \text{ divergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k) \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} a(k) = 0$$

(d.h. $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolge)

BW

Nach 2.16 gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a(k) \right| < \varepsilon$$

(gilt insbesondere für $m = n-1$)

$$\left| \sum_{k=n}^{n} a(k) \right| \cancel{<} =$$

$$|a(n) - 0| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ a konv. gegen 0 $\boxtimes$

Bemerkung: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{=a(k)}$ divergiert, obwohl

$$\lim_{k\to\infty} a(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Die Folge $s = (s(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt (s divergent), denn

$$s(2^{\boxed{1}}) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\cdot \boxed{1}$$

$$s(2^{\boxed{2}}) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} >$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$s(2^{\boxed{3}}) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} > 2\cdot\frac{1}{2} + \sum_{k=5}^{8} \frac{1}{k} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}$$

$$> 2\cdot\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}}_{4\text{ mal}} =$$

$$\boxed{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$\vdots$

$s(2^n) > n\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$ Teilfolge

$(s(2^n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\Rightarrow$ s divergent $\Rightarrow$

harmonische Reihe divergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \leq 1 \text{ divergieren}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Die Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ($s = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert), denn

$$s(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq s(2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$s(2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \boxed{\frac{1}{4}} < 1 + 1$$

$$s(3) \leq \underbrace{s(4)}_{s(2^{\boxed{2}})} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2} < 1 + 1 + \sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k^2} =$$

$$1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{9}}_{<\boxed{\frac{1}{4}}} + \underbrace{\frac{1}{16}}_{<\boxed{\frac{1}{4}}}$$

$$< \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2}}_{\sum_{k=0}^{\boxed{1}} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

$$s(5) \leq s(6) \leq s(7) \leq \underbrace{s(8)}_{s(2^{\boxed{3}})} =$$

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k_2} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=5}^{8} \frac{1}{k_2} =$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\underbrace{\frac{1}{25}}_{<\frac{1}{16}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{64}}_{<\frac{1}{16}}} <$$

$$\underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}_{= \sum_{k=0}^{\boxed{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

$$s(2^n) \overset{!}{<} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ s ist monoton wachsend
$(s(n+1) \geq s(n))$
und nach oben beschränkt
$\left(s(n) \leq s(2^n) \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \right.$

$\overset{\text{Satz 2.13}}{\Longrightarrow}$ s konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv.

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \ \alpha > 1, \text{ konv.} \right)$